CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA
ARKUSZE
MMA-P1

SIERPIEŃ 2015

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	C	D	D	B	C	D	A	C	B	A	C	A	B	C	B	B	C	B	A	D	A	A	D	C	D

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x}=\frac{x}{2x-4}$, gdzie $x\neq 0$ i $x\neq 2$.

Rozwiązanie

Równanie ma sens, gdy $x\neq 0$ i $x\neq 2$.
Przekształcając równanie w sposób równoważny, otrzymujemy

$$\frac{2x-4}{x}-\frac{x}{2x-4}=0,$$

$$\frac{(2x-4)^2-x^2}{x(2x-4)}=0.$$

Stąd

$$(2x-4)^2-x^2=0,$$

$$3x^2-16x+16=0.$$

Wyróżnik trójmianu $3x^2-16x+16$ jest równy $\Delta=16^2-4\cdot 3\cdot 16=64$, więc pierwiastkami tego trójmianu są liczby $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=4$. Obie te liczby są rozwiązaniami równania.

Uwaga
Możemy także wykorzystać własność proporcji (iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych) i wówczas otrzymujemy $(2x-4)^2=x^2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze równanie w postaci równania kwadratowego, np.: $(2x-4)^2-x^2=0$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy rozwiązania równania: $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=4$.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są liczby dwucyfrowe, w których cyfra dziesiątek jest jedną spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, a cyfra jedności – jedną spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Zatem

$$\Omega = \{11,12,13,14,15,16,17,18,21,22,23,24,25,26,27,28,$$
$$31,32,33,34,35,36,37,38,41,42,43,44,45,46,47,48,$$
$$51,52,53,54,55,56,57,58,61,62,63,64,65,66,67,68\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że utworzona liczba jest podzielna przez 11. Zdarzeniu A sprzyja 6 zdarzeń elementarnych: 11, 22, 33, 44, 55, 66. Zatem

$$|A| = 6.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6 \cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy poda

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$

albo

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 6$

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: 11, 22, 33, 44, 55, 66.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{6}{48}$ lub $P(A) = \frac{1}{8}$.

Uwagi

1. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większa od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poda jedynie $P(A) = \frac{6}{48}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $20x \geq 4x^2 + 24$.

Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność do postaci równoważnej $4x^2 - 20x + 24 \leq 0$,

a następnie do postaci $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$:

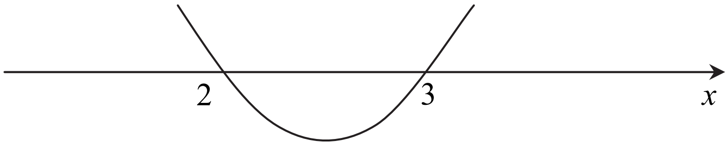
- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ lub $(x-2)(x-3)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$, $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$, $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $2 \le x \le 3$ lub $\langle 2, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 2, 3 \rangle$, np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x-2)(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 6$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy:

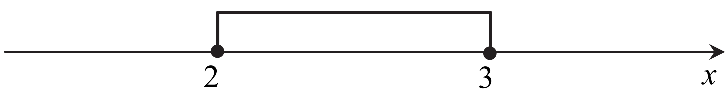
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $2 \le x \le 3$ lub $\langle 2, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 2, 3 \rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $2 \le x \le 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

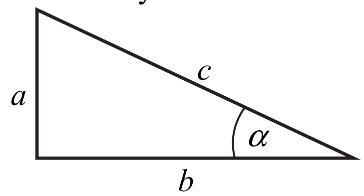
1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \langle 2, -3 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków. Za takie rozwiązanie zdający otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, 2 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji tangens w trójkącie prostokątnym, lewą stronę równości $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$ możemy zapisać, a następnie przekształcić następująco:

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{c^2}{ab}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że szukane wyrażenie $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równe $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2}$.

Ponieważ $\frac{c^2}{ab} = \frac{7}{2}$, więc $\frac{ab}{c^2} = \frac{2}{7}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy wykorzysta definicje lub własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, doprowadzi wyrażenie $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ do postaci $\frac{c^2}{ab}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równa $\frac{2}{7}$.

II sposób rozwiązania

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$, więc z równości $\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{7}{2}$ wynika, że szukany iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ przyjmuje wartość $\frac{2}{7}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze

- $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

albo

- $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ równa się $\frac{2}{7}$.

III sposób rozwiązania

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\text{tg}\alpha > 0$ i równość $\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$ możemy zapisać w postaci

$$\text{tg}^2\alpha - \frac{7}{2}\text{tg}\alpha + 1 = 0 .$$

Równanie powyższe ma dwa rozwiązania:

$$\text{tg}\alpha = \frac{7+\sqrt{33}}{4}, \ \text{tg}\alpha = \frac{7-\sqrt{33}}{4}.$$

Gdy $\text{tg}\alpha = \frac{7+\sqrt{33}}{4}$, to $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{98+14\sqrt{33}}}$ i $\sin\alpha = \sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{14}}$. Wtedy

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha == \sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{98+14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{14} \cdot \frac{16}{98+14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{16\left(7+\sqrt{33}\right)}{14 \cdot 14\left(7+\sqrt{33}\right)}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Gdy zaś $\text{tg}\alpha = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$, to $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{98-14\sqrt{33}}}$ i $\sin\alpha = \sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{14}}$. Wtedy

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha == \sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{98-14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{14} \cdot \frac{16}{98-14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{16\left(7-\sqrt{33}\right)}{14 \cdot 14\left(7-\sqrt{33}\right)}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze, że równanie $\text{tg}^2\alpha - \frac{7}{2}\text{tg}\alpha + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania: $\text{tg}\alpha = \frac{7+\sqrt{33}}{4}$, $\text{tg}\alpha = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$, a ponadto w jednym przypadku obliczy wartość $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ równa się $\frac{2}{7}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedną z wartości $\text{tg}\alpha$, np.: $\text{tg}\alpha = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$, poda jej wartość przybliżoną 0,3139, odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta $\alpha \approx 17^\circ$ oraz przybliżone wartości $\sin\alpha \approx 0,2924$, $\cos\alpha \approx 0,9563$ i na tej podstawie obliczy przybliżoną wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \approx 0,2924 \cdot 0,9563 \approx 0,2762$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Udowodnij, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$.

I sposób rozwiązania

Nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$ przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno

$$x^3 + y^3 - x^2 y - xy^2 \geq 0,$$

$$\left(x^3 - x^2 y\right) + \left(y^3 - xy^2\right) \geq 0,$$

$$x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0,$$

$$(x-y)\left(x^2 - y^2\right) \geq 0,$$

$$(x-y)^2(x+y) \geq 0,$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x-y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz $x + y \geq 0$, gdyż liczby x i y są nieujemne. To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$ przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno

$$x^3 + y^3 - x^2 y - xy^2 \geq 0,$$

$$\left(x^3 + y^3\right) - \left(x^2 y + xy^2\right) \geq 0,$$

$$(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - xy(x+y) \geq 0,$$

$$(x+y)\left(x^2 - xy + y^2 - xy\right) \geq 0,$$

$$(x+y)\left(x^2 - 2xy + y^2\right) \geq 0,$$

$$(x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x-y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz $x + y \geq 0$, gdyż liczby x i y są nieujemne. To kończy dowód.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- zapisze nierówność w postaci $(x-y)\left(x^2 - y^2\right) \geq 0$

albo

- zapisze nierówność w postaci $(x+y)\left(x^2 - 2xy + y^2\right) \geq 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

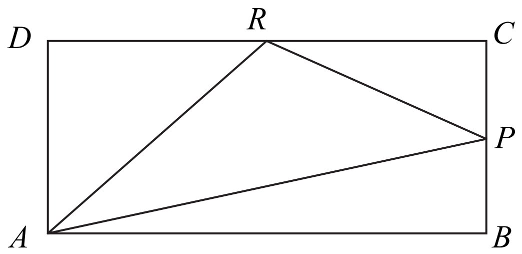
gdy uzasadni prawdziwość nierówności $x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$.

Uwaga

Jeżeli zdający przejdzie w swoim rozumowaniu z postaci $(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - xy(x+y) \geq 0$ do postaci $x^2 - xy + y^2 - xy \geq 0$ bez zaznaczenia, że skoro x i y są nieujemne, to ich suma też jest nieujemna, ale dokona dzielenia obu stron nierówności przez $x + y$ i dalej przeprowadzi poprawne rozumowanie, to otrzymuje **1 punkt**.

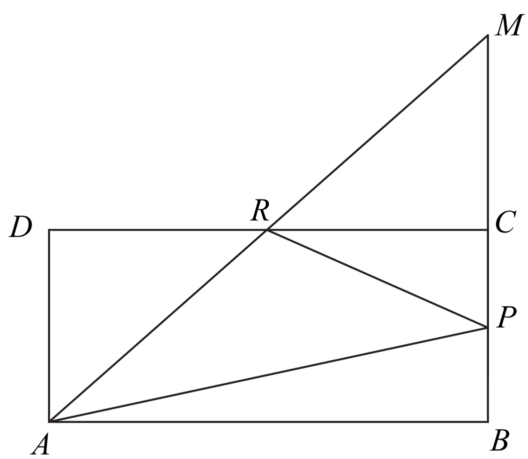
Zadanie 31. *(2 pkt)*

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



I sposób rozwiązania

Przedłużamy prostą AR oraz bok prostokąta BC. Proste te przecinają się w punkcie M. Rozpatrujemy trójkąty ADR oraz RCM.



$|\sphericalangle ARD| = |\sphericalangle CRM|$ (kąty wierzchołkowe), kąty przy wierzchołkach D i C są proste oraz $|DR| = |RC|$, stąd na podstawie cechy przystawania trójkątów kbk wnioskujemy, że trójkąt ADR jest przystający do trójkąta RCM. Z przystawania trójkątów mamy $|AR| = |RM|$.

Pole trójkąta APR jest równe polu trójkąta RPM, ponieważ oba trójkąty mają równe podstawy ($|AR| = |RM|$) oraz taką samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P.

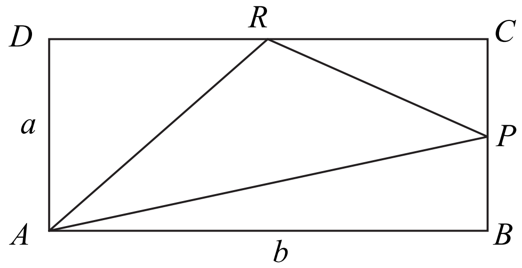
$P_{\Delta APR} = P_{\Delta RPM} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RCM}$, a z faktu przystawania trójkątów RCM oraz ADR mamy: $P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta ADR}$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze, że pole trójkąta APR jest równe polu trójkąta RPM i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania



Oznaczmy: $|AD| = a$ oraz $|AB| = b$, stąd $|BP| = |PC| = \frac{a}{2}$, $|CR| = |RD| = \frac{b}{2}$.

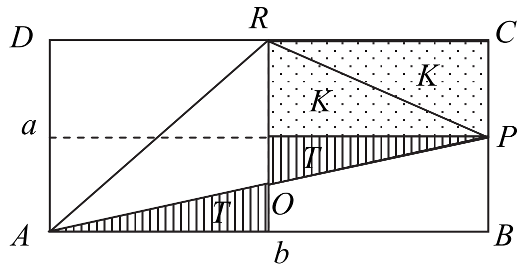
Obliczamy pola trójkątów prostokątnych *PCR*, *RDA*: $P_{\Delta PCR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{8}$ oraz $P_{\Delta RDA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$ zatem $P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA} = \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4} = \frac{3ab}{8}$.

Trójkąt *ABP* jest prostokątny i jego pole jest równe $\frac{1}{2} b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$.

Pole trójkąta *APR* jest różnicą pola prostokąta *ABCD* i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych *ABP*, *PCR* oraz *RDA* zatem $P_{\Delta APR} = ab - \left(2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8}\right) = \frac{3ab}{8}$.

Otrzymaliśmy równość $P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA}$.

III sposób rozwiązania



Podzielimy prostokąt *ABCD* na części, jak na rysunku.
Pole trójkąta *APR* zapisujemy w następujący sposób:
jest to suma pól trójkątów $K = \frac{1}{8}ab$, $T = \frac{1}{2}K = \frac{1}{16}ab$ oraz pola trójkąta *AOR*, którego pole jest równe: $P_{AOR} = \frac{1}{4}ab - T = \frac{1}{4}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{3}{16}ab$.

Zapisujemy sumę: $P_{APR} = \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \frac{3}{16}ab = \frac{3}{8}ab$

Pole trójkąta *ARD* jest równe $2K = \frac{1}{4}ab$. Sumujemy pola trójkąta *ARD* oraz *PCR* i otrzymujemy: $P_{ARD} + P_{PCR} = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{8}ab = \frac{3}{8}ab$, czyli wykazaliśmy, że $P_{ARD} + P_{PCR} = P_{APR}$.

Uwaga
Zamiast zapisywać pole prostokąta *ABCD* w zależności od długości boków możemy użyć innego oznaczenia, np. *P*, wtedy otrzymujemy: $K = \frac{1}{8}P$, $T = \frac{1}{16}P$, $P_{AOR} = \frac{3}{16}P$ i dalej

$P_{APR}=\frac{1}{8}P+\frac{1}{16}P+\frac{3}{16}P=\frac{3}{8}P$ oraz $P_{ARD}+P_{PCR}=\frac{1}{4}P+\frac{1}{8}P=\frac{3}{8}P$.

Schemat oceniania II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

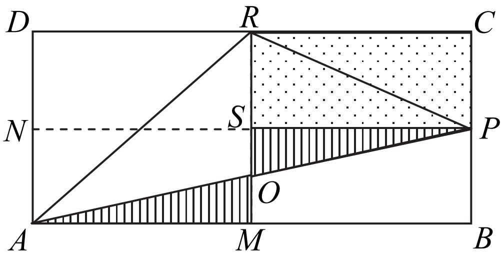
gdy zapisze, że pole trójkąta *APR* stanowi $\frac{3}{8}$ pola prostokąta *ABCD*, np. zapisze $P_{APR}=\frac{1}{8}ab+\frac{1}{16}ab+\frac{3}{16}ab=\frac{3}{8}ab$ lub $P_{\Delta APR}=ab-\left(2\cdot\frac{ab}{4}+\frac{ab}{8}\right)=\frac{3ab}{8}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinki *PN* i *RM* łączące środki boków prostokąta. Niech *S* będzie punktem ich .przecięcia.



Trójkąty *ADR* i *RMA* są przystające, więc mają równe pola, trójkąty *PCR* i *RSP* też są przystające, więc ich pola też są równe, także trójkąty *AMO* i *PSO* są przystające, więc ich pola też są równe. Zatem

$$P_{ADR}+P_{PCR}=P_{AMR}+P_{RSP}=\left(P_{AOR}+P_{AMO}\right)+P_{RSP}=\left(P_{AOR}+P_{PSO}\right)+P_{RSP}=$$
$$=P_{AOR}+\left(P_{PSO}+P_{RSP}\right)=P_{AOR}+P_{OPR}=P_{APR}$$

co należało wykazać.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy ustali, że trójkąty *ADR* i *RMA* są przystające, trójkąty *PCR* i *RSP* są przystające oraz trójkąty *AMO* i *PSO* są przystające i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A=(-2,2)$, $B=(6,-2)$, $C=(10,6)$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta *ABC*: $|AB|=4\sqrt{5}$, $|BC|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB|=|BC|=4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta *ABC* jest symetralna odcinka *AC*. By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta wyznaczamy współrzędne środka odcinka *AC*: $S=(4,4)$.

Wyznaczamy równanie prostej BS, korzystając ze wzoru na prostą przechodząca przez dwa punkty:

$$y-4=\frac{-2-4}{6-4}(x-4),$$
$$y=-3x+16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y=-3x+16$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta ABC: $|AB|=4\sqrt{5}$, $|BC|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB|=|BC|=4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna odcinka AC.
By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta, wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC}=\frac{1}{3}$, a następnie współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do AC: $a=-\frac{1}{a_{AC}}=-3$.
Wyznaczamy równanie prostej zawierającej symetralną boku AC i przechodzącej przez punkt B:

$$y+2=-3(x-6),$$
$$y=-3x+16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y=-3x+16$.

III sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta ABC: $|AB|=4\sqrt{5}$, $|BC|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB|=|BC|=4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna odcinka AC. Zatem jego osią symetrii jest symetralna boku AC, będąca zbiorem punktów równo oddalonych od obu końców odcinka.
Niech $K(x,y)$ będzie punktem należącym do symetralnej boku AC. Zatem $|AK|=|KC|$.

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(10-x)^2+(6-y)^2},$$
$$x^2+4x+4+y^2-4y+4=100-20x+x^2+36-12y+y^2,$$
$$24x+8y-128=0,$$
$$3x+y-16=0,$$
$$y=-3x+16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y=-3x+16$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- obliczy długości dwóch boków trójkąta ABC: $|AB|=4\sqrt{5}$, $|AC|=4\sqrt{10}$ i $|BC|=4\sqrt{5}$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC}=\frac{1}{3}$

albo

- obliczy współrzędne wektora AC

albo

- zapisze, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku AC

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$ i współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC}=\frac{1}{3}$

albo

- uzasadni, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku AC

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga
Przyjmujemy, że jako uzasadnienie wystarczy rysunek w układzie współrzędnych.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$ oraz współczynnik kierunkowy symetralnej boku AC: $a=-3$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka AC: $S=(4,4)$ oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt B

albo

- obliczy współrzędne wektora AC oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt B i jest prostopadła do wektora AC

albo

- zapisze równanie symetralnej boku AC: $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(10-x)^2+(6-y)^2}$

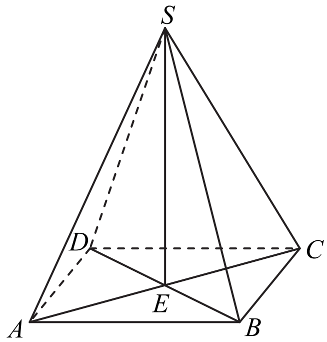
i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający wyznaczy równanie osi symetrii trójkąta ABC: $y=-3x+16$ ($3x+y-16=0$).

Uwaga
Jeżeli zdający nie uzasadni, że osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna boku AC (np. nie sporządzi rysunku w układzie współrzędnych albo po wyznaczeniu równania symetralnej boku AC nie sprawdzi, że punkt B leży na tej symetralnej), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

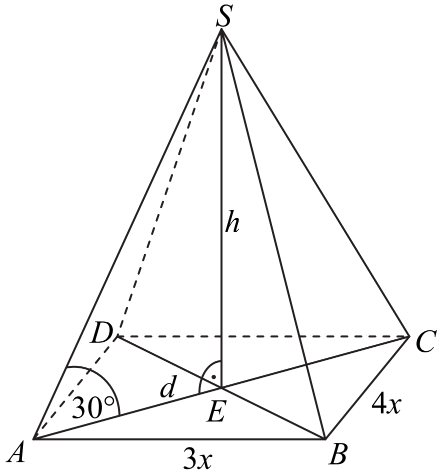
Zadanie 33. *(4 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt E jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek SE jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość ostrosłupa.



Rozwiązanie

Ponieważ stosunek długości boków prostokąta $ABCD$ jest równy $3:4$, więc możemy przyjąć, że $|AB| = 3x$ i $|BC| = 4x$. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe

$$P_{ABCD} = 3x \cdot 4x = 12x^2 .$$

Zatem

$$12x^2 = 192 ,$$
$$x^2 = 16 .$$

Stąd $x = 4$, więc $|AB| = 3 \cdot 4 = 12$ i $|BC| = 4 \cdot 4 = 16$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 .$$

Stąd $|AC| = 20$.

Tangens kąta SAE w trójkącie prostokątnym AES jest równy $\mathrm{tg}30^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$. Stąd

$$h = \tfrac{1}{2} d \cdot \mathrm{tg}30^\circ = 10 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{3} = \tfrac{10\sqrt{3}}{3} .$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot 192 \cdot \tfrac{10\sqrt{3}}{3} = \tfrac{640\sqrt{3}}{3} .$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{640\sqrt{3}}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający obliczy długości boków prostokąta, będącego podstawą ostrosłupa: 16 i 12.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy długość przekątnej prostokąta $ABCD$: $|AC| = 20$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{640\sqrt{3}}{3}$.

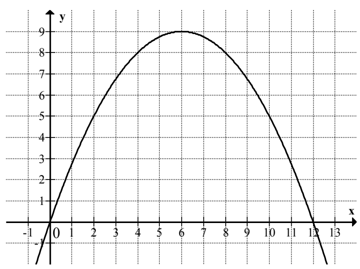
Zadanie 34. *(5 pkt)*

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0,12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9. Oblicz współczynniki a, b i c funkcji *f*.

I sposób rozwiązania

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest kwadratowa, więc $a \neq 0$. Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa $y_w = 9$ oraz $a < 0$.

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0,12)$, więc miejscami zerowymi funkcji *f* są liczby 0 i 12. Możemy też narysować wykres funkcji *f*.



Pierwsza współrzędną wierzchołka paraboli – wykresu funkcji *f* jest równa

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+12}{2} = 6$$

Zapisujemy wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej: $f(x) = a \cdot (x-6)^2 + 9$.

Dla argumentu 0 wartość funkcji jest równa 0, więc otrzymujemy równanie

$$0 = a \cdot (0-6)^2 + 9,$$

$$a = -\frac{1}{4}.$$

Wzór funkcji *f* ma więc postać $f(x) = -\frac{1}{4}(x-6)^2 + 9$, a po przekształceniu do postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x.$$

Współczynniki *a*, *b*, *c* funkcji *f* są więc równe: $a=-\frac{1}{4}$, $b=3$, $c=0$.

II sposób rozwiązania

Funkcja $f(x)=ax^2+bx+c$ jest kwadratowa, więc $a\neq 0$. Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa $y_w=9$ oraz $a<0$.

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)>0$ jest przedział $(0,12)$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby: 0 i 12. Stąd wynika, że pierwsza współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, jest równa $x_w=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+12}{2}=6$.

Możemy więc zapisać wzór funkcji f w postaci iloczynowej

$$f(x)=a\cdot x\cdot(x-12).$$

Wierzchołek $W(6,9)$ paraboli będącej wykresem funkcji *f* jest jednym z punktów tego wykresu, więc

$$9=a\cdot 6\cdot(6-12),$$

$$a=-\frac{1}{4}.$$

Wzór funkcji *f* ma więc postać $f(x)=-\frac{1}{4}x(x-12)$, a po przekształceniu do postaci ogólnej

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+3x,$$

z której odczytujemy współczynniki *a*, *b*, *c*: $a=-\frac{1}{4}$, $b=3$, $c=0$.

III sposób rozwiązania

Funkcja $f(x)=ax^2+bx+c$ jest kwadratowa, więc $a\neq 0$. Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa $y_w=9$ oraz $a<0$.

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)>0$ jest przedział $(0,12)$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby: 0 i 12. Stąd wynika, że pierwsza współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, jest równa $x_w=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+12}{2}=6$.

Mamy zatem trzy punkty o współrzędnych $(0,0)$, $(12,0)$, $(6,9)$ leżące na wykresie funkcji *f*. Zatem

$$f(0)=0 \text{ i } f(12)=0 \text{ i } f(6)=9,$$

czyli

$$c=0 \text{ i } a\cdot 12^2+b\cdot 12+c=0 \text{ i } a\cdot 6^2+b\cdot 6+c=9,$$

$$c=0,\ 12a+b=0,\ 12a+2b=3,$$

Stąd $a=-\frac{1}{4}$ i $b=3$ i $c=0$.

Odpowiedź: $a=-\frac{1}{4}$, $b=3$, $c=0$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze

- ....m
  iejsca zerowe funkcji *f*: $x_1 = 0$ i $x_2 = 12$

albo

- ....
  drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f*: $y_w = 9$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- ....z
  apisze wzór funkcji *f* w postaci $f(x) = a \cdot x \cdot (x-12)$

  albo
- ....o
  bliczy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji: $W = (6, 9)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze

- wzór funkcji *f* w postaci $f(x) = a \cdot x \cdot (x-12)$ i obliczy współrzędne wierzchołka jej wykresu: $W = (6, 9)$

albo

- wzór funkcji *f* w postaci $f(x) = a \cdot (x-6)^2 + 9$

albo

- zapisze, że współczynnik $c = 0$ oraz zapisze jedno z równań wynikających z podstawienia do wzoru funkcji współrzędnych wierzchołka paraboli lub współrzędnych punktu przecięcia z osią Ox niebędącego początkiem układu współrzędnych: np.: $36a + 6b = 9$ lub $144a + 12b = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.

Zdający

- zapisze, że współczynnik $c = 0$ oraz zapisze układ równań $\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 9 \end{cases}$

albo

- wyznaczy współczynnik a: $a = -\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający wyznaczy współczynniki a, b, c: $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$, $c = 0$.